NICOLAS BOURBAKI

L'ARCHITECTURE DES MATHÉMATIQUES

La Mathématique, ou les Mathématiques ?

Donner, à l'heure actuelle, une idée d'ensemble de la science mathématique, est une entreprise qui semble au premier abord offrir des difficultés presque insurmontables, en raison de l'étendue et de la variété du sujet. Comme dans toutes les autres sciences, le nombre des mathématiciens et des travaux consacrés aux mathématiques s'est considérablement accru depuis la fin du XIXe siècle. Les mémoires de mathématiques pures publiés dans le monde, au cours d'une année normale, couvrent plusieurs milliers de pages. Tout n'y est sans doute pas d'une égale valeur ; mais après décantation de l'inévitable déchet, il n'en reste pas moins que chaque année la science mathématique s'enrichit d'une foule de résultats nouveaux, se diversifie et se ramifie constamment en théories sans cesse modifiées, refondues, confrontées, combinées les unes aux autres. Pas un mathématicien, même en y consacrant toute son activité, ne serait aujourd'hui en mesure de suivre ce développement dans tous ses détails. Nombre d'entre eux se cantonnent dans un coin des mathématiques d'où ils ne cherchent pas à sortir, et non seulement ignorent à peu près complètement tout ce qui ne touche pas à leur sujet, mais encore seraient hors d'état de comprendre le langage et la terminologie employés par leurs confrères qui se réclament d'une spécialité éloignée de la leur. Il n'en est guère, même parmi ceux dont la culture est la plus vaste, qui ne se sentent dépaysés dans certaines régions de l'immense monde mathématique ; quant à ceux qui, tels Poincaré ou Hilbert, impriment le sceau de leur génie dans presque tous les domaines, ils constituent, même parmi les plus grands, une rarissime exception.

Il ne saurait donc être question de donner au profane une image précise de ce que les mathématiciens eux-mêmes ne peuvent concevoir en sa totalité. Mais on peut se demander si cette prolifération exubérante est le développement d'un organisme vigoureusement charpenté, acquérant chaque jour plus de cohésion et d'unité des accroissements qu'il

reçoit, ou si au contraire elle n'est que le signe extérieur d'une tendance à un émiettement de plus en plus poussé, dû à la nature même des mathématiques, et si ces dernières ne sont pas en train de devenir une tour de Babel de disciplines autonomes, isolées les unes des autres, tant dans leurs buts que dans leurs méthodes, et jusque dans leur langage. En un mot, y a-t-il aujourd'hui *une* mathématique ou *des* mathématiques ?

Bien que plus actuelle que jamais, il ne faudrait pas croire que cette question soit nouvelle ; elle s'est posée presque dès les premiers pas de la science mathématique. C'est qu'en effet, même en négligeant les mathématiques appliquées, il subsiste, entre la géométrie et l'arithmétique (du moins sous leur aspect élémentaire) une évidente dualité d'origine, celle-ci étant initialement science du *discret*, celle-là de l'étendue *continue*, deux aspects qui s'opposent radicalement depuis la découverte des irrationnelles. D'ailleurs, c'est précisément cette découverte qui fut fatale à la première tentative d'unification de la science, l'arithmétisme des pythagoriciens (« toutes choses sont nombres »).

Nous serions entraînés trop loin s'il nous fallait suivre, du pythagorisme à nos jours, les vicissitudes de la conception unitaire des mathématiques. C'est d'ailleurs là une tâche à laquelle un philosophe est mieux préparé qu'un mathématicien ; car c'est un trait commun des diverses tentatives pour intégrer en un tout cohérent l'ensemble des mathématiques — qu'il s'agisse de Platon, de Descartes ou de Leibniz, de l'arithmétisme ou de la logistique du XIXe siècle — qu'elles ont été faites en liaison avec un système philosophique plus ou moins ambitieux ; mais partant toujours d'idées *a priori* sur les relations de la mathématique avec le double univers du monde extérieur et du monde de la pensée. Nous ne saurions mieux faire que de renvoyer sur ce point le lecteur à l'étude historique et critique de M. Brunschvicg : *Les Etapes de la Philosophie mathématique* (1). Notre tâche est plus modeste et plus circonscrite ; nous n'entreprendrons pas d'examiner les rapports des mathématiques avec le réel ou avec les grandes catégories de la pensée ; c'est à l'intérieur de la mathématique que nous entendons rester, et chercher, en analysant ses démarches propres, une réponse à la question que nous nous sommes posée.

Formalisme logique et méthode axiomatique

Après la faillite plus ou moins apparente des divers systèmes auxquels nous avons fait allusion plus haut, il semblait, au début de ce siècle, qu'on eût à peu près renoncé à voir dans les mathématiques une science caractérisée par un objet et une méthode uniques ; on avait plutôt tendance à les considérer comme « *une série de disciplines fondées sur des notions particulières, délimitées avec précision* », reliées par « *mille che-*

(1) Paris. Alcan, 1912.

mins de communication » permettant aux méthodes propres à une de ces disciplines de venir en fructifier une ou plusieurs autres (Brunschvicg, *loc. cit.*, p. 447). Aujourd'hui, au contraire, nous croyons que l'évolution interne de la science mathématique a, malgré les apparences, resserré plus que jamais l'unité de ses diverses parties, et y a créé une sorte de noyau central plus cohérent qu'il n'a jamais été. L'essentiel de cette évolution a consisté en une systématisation des relations existant entre les diverses théories mathématiques, et se résume en une tendance qui est généralement connue sous le nom de « méthode axiomatique ».

On dit aussi parfois « formalisme » ou « méthode formaliste » ; mais il faut dès le début mettre en garde contre le risque d'une confusion que provoquent ces mots mal définis, et qui n'est que trop souvent exploitée par les adversaires de l'axiomatique. Chacun sait que le caractère externe des mathématiques est de se présenter sous l'aspect de cette « longue chaîne de raisons » dont parlait Descartes ; toute théorie mathématique est un enchaînement de propositions, se déduisant les unes des autres conformément aux règles d'une logique qui, pour l'essentiel, est celle codifiée depuis Aristote sous le nom de « logique formelle », convenablement adaptée aux buts particuliers du mathématicien. C'est donc un truisme banal de dire que ce « raisonnement déductif » est un principe d'unité pour la mathématique ; mais une remarque aussi superficielle ne peut certainement rendre compte de l'apparente complexité des diverses théories mathématiques, pas plus que l'on ne saurait, par exemple, réunir en une science unique la physique et la biologie, sous le prétexte qu'elles appliquent toutes deux la méthode expérimentale. Le mode de raisonnement par enchaînement de syllogismes n'est qu'un *mécanisme* transformateur, applicable indifféremment à toutes sortes de prémisses, et qui ne saurait donc caractériser la nature de celles-ci. En d'autres termes, c'est la *forme* extérieure que le mathématicien donne à sa pensée, le véhicule qui la rend assimilable à d'autres (1), et, pour tout dire, le *langage* propre à la mathématique ; mais il n'y faut pas chercher autre chose. Codifier ce langage, en ordonner le vocabulaire et en clarifier la syntaxe, c'est faire œuvre fort utile, et qui constitue effectivement une face de la méthode axiomatique, celle qu'on peut proprement appeler le *formalisme logique* (ou, comme on dit aussi, la « logistique »). Mais — et nous insistons sur ce point — *ce n'en est qu'une face*, et la moins intéressante.

Ce que se propose pour but essentiel l'axiomatique, c'est précisément ce que le formalisme logique, à lui seul, est incapable de fournir, l'intelligibilité profonde des mathématiques. De même que la méthode expérimentale part de la croyance *a priori* en la permanence des lois natu-

(1) Tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement « comprise » tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à toute autre.

relles, la méthode axiomatique trouve son point d'appui dans la conviction que, si les mathématiques ne sont pas un enchaînement de syllogismes se déroulant au hasard, elles ne sont pas davantage une collection d'artifices plus ou moins « astucieux », faits de rapprochements fortuits où triomphe la pure habileté technique. Là où l'observateur superficiel ne voit que deux ou plusieurs théories en apparence très distinctes, se prêtant, par l'entremise d'un mathématicien de génie, un « secours inattendu » (Brunschvicg, *loc. cit.*, p. 446), la méthode axiomatique enseigne à rechercher les raisons profondes de cette découverte, à trouver les idées communes enfouies sous l'appareil extérieur des détails propres à chacune des théories considérées, à dégager ces idées et à les mettre en lumière.

La notion de « structure »

Sous quelle forme va se faire cette opération ? C'est ici que l'axiomatique va se rapprocher le plus de la méthode expérimentale. Puisant comme elle à la source cartésienne, elle « divisera les difficultés pour les mieux résoudre » ; dans les démonstrations d'une théorie, elle cherchera à *dissocier* les ressorts principaux des raisonnements qui y figurent ; puis, prenant chacun d'entre eux *isolément*, et le posant en principe abstrait, elle déroulera les conséquences qui lui sont propres ; enfin, revenant à la théorie étudiée, elle en *combinera* de nouveau les éléments constitutifs précédemment dégagés, et étudiera comment ils réagissent les uns sur les autres. Il n'y a, bien entendu, rien de neuf dans ce classique balancement de l'analyse et de la synthèse ; toute l'originalité de la méthode réside dans la manière dont elle est appliquée.

Pour illustrer par un exemple le procédé dont nous venons de faire la description schématique, nous prendrons une des théories axiomatiques les plus anciennes (et les plus simples), celle des « groupes abstraits ». Considérons par exemple les trois opérations suivantes : 1° l'addition des nombres réels, où la somme de deux nombres réels (positifs, négatifs ou nuls) est définie de la manière ordinaire ; 2° la multiplication des entiers « *modulo* un nombre premier p », où les éléments que l'on considère sont les entiers 1, 2, .., p-1, le « produit » de deux de ces nombres étant par convention le *reste* de la division par p de leur produit au sens ordinaire ; 3° la « composition » des déplacements dans l'espace euclidien à 3 dimensions, le « composé » (ou « produit ») de deux déplacements S, T (pris dans cet ordre), étant par définition le déplacement obtenu en effectuant d'abord le déplacement T, puis le déplacement S. Dans chacune de ces trois théories, à deux éléments x, y (pris dans cet ordre) de l'ensemble d'éléments considéré (dans le premier cas l'ensemble des nombres réels, dans le second l'ensemble des nombres 1, 2,.., p-1, dans le troisième l'ensemble de tous les déplacements) on fait correspondre (par un procédé particulier à la théorie) un troisième élément bien déterminé, que nous conviendrons de désigner symboliquement dans les

trois cas par $x \tau y$ (ce sera la somme de x et de y si x et y sont des nombres réels, leur produit « modulo p » si ce sont des entiers $\leq p-1$, leur « composé » si ce sont des déplacements). Si maintenant on examine les propriétés de cette « opération » dans chacune des trois théories, on constate qu'elles présentent un remarquable parallélisme ; mais à l'intérieur de chacune de ces théories, ces propriétés dépendent les unes des autres, et une analyse de leurs connexions logiques amène à en dégager un petit nombre qui, elles, sont indépendantes (c'est-à-dire qu'aucune n'est conséquence logique de toutes les autres). On peut, par exemple (1), prendre les trois suivantes, que nous exprimerons avec notre notation symbolique commune aux trois théories, mais qu'il est très aisé de traduire dans le langage particulier à chacune d'elles :

a) Quels que soient les éléments x, y, z, on a $x \tau (y \tau z) = (x \tau y) \tau z$ (« associativité » de l'opération $x \tau y$) ;

b) Il existe un élément e tel que, pour tout élément x, on ait $e \tau x = x \tau e = x$ (pour l'addition des nombres réels, c'est le nombre 0 ; pour la multiplication « modulo p » c'est le nombre 1 ; pour la composition des déplacements, c'est le déplacement « identique » qui laisse fixe chaque point de l'espace) ;

c) Pour tout élément x, il existe un élément x' tel que $x \tau x' = x' \tau x = e$ (pour l'addition des nombres réels, x' est le nombre opposé $-x$; pour la composition des déplacements, x' est le déplacement « inverse » de x, c'est-à-dire celui qui ramène chaque point déplacé par x à sa position primitive ; pour la multiplication « modulo p », l'existence de x' résulte d'un raisonnement d'arithmétique très simple (2).

On constate alors que les propriétés qui sont susceptibles de s'exprimer de la même manière dans les trois théories, à l'aide de la notation commune, sont des conséquences des trois précédentes. Par exemple, proposons-nous de démontrer que la relation $x \tau y = x \tau z$ entraîne $y = z$; on pourrait le faire dans chacune des théories par un raisonnement qui lui soit particulier ; mais on peut procéder comme suit d'une façon applicable à tous les cas : de la relation $x \tau y = x \tau z$ on déduit (x' ayant le sens défini ci-dessus) $x' \tau (x \tau y) = x' \tau (x \tau z)$; puis, en appliquant *a*), $(x' \tau x) \tau y = (x' \tau x) \tau z$; en utilisant *c*), cette relation s'écrit $e \tau y = e \tau z$, et enfin, en appliquant *b*), $y = z$, ce qu'il fallait démontrer. Dans ce raisonnement, nous avons fait totalement abstraction de la *nature* des éléments x, y, z considérés, c'est-à-dire que nous ne

---

(1) Ce choix n'a rien d'absolu, et on connaît de nombreux systèmes d'axiomes « équivalents » à celui que nous explicitons, les énoncés des axiomes de chacun de ces systèmes étant conséquences logiques des axiomes d'un quelconque des autres systèmes.

(2) On remarque que les restes de la division par p des nombres $x, x^2, .., x^n, ...$ ne sauraient être tous distincts ; en exprimant que deux de ces restes sont égaux, on montre aisément qu'une puissance x^m de x a un reste égal à *un* ; si x' est le reste de la division par p de x^{m-1}, on en conclut que le produit « modulo p » de x et de x' est égal à 1.

nous sommes pas souciés de savoir s'ils étaient des nombres réels, ou des entiers $\leq p-1$, ou des déplacements ; la seule prémisse qui soit intervenue est que l'opération $x \tau y$ sur ces éléments satisfaisait aux propriétés *a*), *b*) et *c*). Ne serait-ce que pour éviter des répétitions fastidieuses, on conçoit donc qu'il est commode de dérouler *une fois pour toutes* les conséquences logiques des trois *seules* propriétés *a*), *b*), *c*) ; il faut naturellement, pour la commodité du langage, adopter une terminologie commune ; on dit qu'un ensemble où l'on a défini une opération $x \tau y$ satisfaisant aux trois propriétés *a*), *b*), *c*) est muni d'une *structure de groupe* (ou, plus brièvement, qu'il est un *groupe*) ; les propriétés *a*), *b*), *c*) sont appelées les *axiomes* (1) des structures de groupe, et dérouler leurs conséquences, c'est faire la *théorie axiomatique des groupes*.

On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par une *structure mathématique*. Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature (2) *n'est pas spécifiée* ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments (3) (dans le cas des groupes, c'était la relation $z = x \tau y$ entre trois éléments arbitraires) ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère)

---

(1) Il va sans dire qu'il n'y a plus aucun point commun entre ce sens du mot « axiome » et le sens traditionnel de « vérité évidente ».

(2) Nous nous plaçons ici au point de vue « naïf » et n'abordons pas les épineuses questions, mi-philosophiques, mi-mathématiques, soulevées par le problème de la « nature » des « êtres » ou « objets » mathématiques. Qu'il nous suffise de dire qu'au pluralisme initial de la représentation mentale de ces « êtres » — imaginés au début comme des « abstractions » idéales de l'expérience sensible, et conservant toute l'hétérogénéité de celle-ci — les recherches axiomatiques du XIXe et du XXe siècle ont peu à peu substitué, là aussi, une conception unitaire, ramenant progressivement toutes les notions mathématiques, d'abord à celle de nombre entier, puis, en une deuxième étape, à la notion d'*ensemble*. Cette dernière, longtemps considérée comme « primitive » et « indéfinissable » a été l'objet de polémiques sans fin, dues à son caractère d'extrême généralité et à la nature très vague des représentations mentales qu'elle évoque ; les difficultés ne se sont évanouies que lorsque s'est évanouie la notion d'ensemble elle-même (et avec elle, tous les pseudo-problèmes métaphysiques sur les « êtres » mathématiques), à la lumière des récentes recherches sur le formalisme logique ; dans cette nouvelle conception, les structures mathématiques deviennent, à proprement parler, *les seuls « objets »* de la mathématique.

Le lecteur trouvera de plus amples développements sur ce point dans les deux articles suivants :

J. Dieudonné : *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques.* (*Revue Scientifique*, LXXVII (1939), p. 224-232).

H. Cartan : *Sur le fondement logique des mathématiques.* (*Revue Scientifique*, LXXXI (1943), p. 3-11).

(3) En réalité, cette définition des structures n'est pas assez générale pour les besoins des mathématiques ; il faut aussi envisager le cas où les relations définissant une structure auraient lieu, non entre des *éléments* de l'ensemble considéré, mais aussi entre des *parties* de cet ensemble, et même, plus généralement, entre des éléments d'ensembles de « degré » encore plus élevé dans ce qu'on appelle l' « échelle des types ». Pour plus de précision sur ce point, voir nos *Eléments de Mathématique*, livre I (fasc. de résultats), *Actual. Scient. et Industr.*, no 846.

et qui sont les *axiomes* de la structure envisagée (1). Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, *en s'interdisant toute autre hypothèse* sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur « nature » propre).

Les grands types de structures.

Les relations qui forment le point de départ de la définition d'une structure peuvent être de nature assez variée. Celle qui intervient dans les structures de groupe est ce qu'on appelle une « loi de composition », c'est-à-dire une relation entre trois éléments déterminant le troisième de façon unique en fonction des deux premiers. Lorsque les relations de définition d'une structure sont des « lois de composition », la structure correspondante est appelée *structure algébrique* (par exemple, une structure de *corps* est définie par deux lois de composition, avec des axiomes convenables : l'addition et la multiplication des nombres réels définissent une structure de corps sur l'ensemble de ces nombres).

Un autre type important est fourni par les structures définies par une relation d'*ordre* ; c'est cette fois une relation entre deux éléments x, y, qui s'énonce le plus souvent « x est au plus égal à y », et que nous noterons de façon générale $x\mathrm{R}y$. Ici, il n'est plus du tout supposé qu'elle détermine uniquement un des deux éléments x, y en fonction de l'autre ; les axiomes auxquels elle est soumise sont les suivants : a) pour tout x, on a $x\mathrm{R}x$; b) les relations $x\mathrm{R}y$ et $y\mathrm{R}x$ entraînent $x = y$; c) les relations $x\mathrm{R}y$ et $y\mathrm{R}z$ entraînent $x\mathrm{R}z$. Un exemple évident d'ensemble pourvu d'une telle structure est l'ensemble des entiers (ou celui des nombres réels), en remplaçant le signe R par le signe $\leqq$. Mais on observera que nous n'avons pas inclus dans les axiomes la propriété suivante, qui semble inséparable de la notion vulgaire d' « ordre » : « quels que soient x et y, on a $x\mathrm{R}y$ ou $y\mathrm{R}x$ ». Autrement dit, on n'exclut pas le cas où deux éléments pourraient être *incomparables*. Cela peut sembler à première vue paradoxal, mais il est facile de donner des exemples fort importants de structure d'ordre où un tel phénomène se présente. C'est ce qui se passe quand X et Y désignant des parties d'un même ensemble, la relation XRY signifie « X est contenu dans Y » ; ou encore quand x et y étant des entiers > 0, $x\mathrm{R}y$ signifie « x divise y » ; ou enfin lorsque, $f(x)$ et $g(x)$ étant des fonctions réelles définies dans un intervalle $a \leqq x \leqq b$, $f(x)\ \mathrm{R}\ g(x)$ signifie « quel que soit x, $f(x) \leqq g(x)$ ». Ces exemples montrent en même temps la grande variété des domaines où interviennent les structures d'ordre, et font pressentir l'intérêt de leur étude.

---

(1) Dans le cas des groupes, il faudrait en toute rigueur compter comme axiome, en dehors des propriétés a), b), c) énoncés ci-dessus, le fait que la relation $z = x \tau y$ détermine un z et un seul lorsque x et y sont donnés ; d'ordinaire on considère que cette propriété est tacitement impliquée par l'écriture de cette relation.

Nous dirons encore quelques mots d'un troisième grand type de structures, les *structures topologiques* (ou *topologies*) : elles fournissent une formulation mathématique abstraite des notions intuitives de *voisinage*, de *limite* et de *continuité*, auxquelles nous conduit notre conception de l'espace. L'effort d'abstraction que nécessite l'énoncé des axiomes d'une telle structure est ici nettement supérieur à ce qu'il était dans les exemples précédents, et le cadre de cet exposé nous oblige à renvoyer aux traités spéciaux les lecteurs désireux de précisions sur ce point (1).

La standardisation de l'outillage mathématique.

Nous pensons en avoir assez dit pour permettre au lecteur de se faire une idée assez précise de la méthode axiomatique. Son trait le plus saillant, d'après ce qui précède, est de réaliser une *économie de pensée* considérable. Les « structures » sont des *outils* pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié. On pourrait donc dire que la méthode axiomatique n'est autre que le « système Taylor » des mathématiques.

Mais c'est là une comparaison insuffisante ; le mathématicien ne travaille pas machinalement, comme l'ouvrier à la chaîne ; on ne saurait trop insister sur le rôle fondamental que joue, dans ses recherches, une *intuition* particulière (2), qui n'est pas l'intuition sensible vulgaire, mais plutôt une sorte de divination directe (antérieure à tout raisonnement) du comportement normal qu'il semble en droit d'attendre, de la part d'êtres mathématiques qu'une longue fréquentation lui a rendu presque aussi familiers que les êtres du monde réel. Or, chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières, issues des théories d'où l'a dégagée l'analyse axiomatique que nous avons décrite plus haut ; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut. Qu'on songe — pour prendre un exemple ancien — au progrès réalisé au début du XIXe siècle par la représentation géométrique des imaginaires ; de notre point de vue

(1) Voir par exemple nos *Eléments*, livre III, introduction et chapitre I. *Actual. Scient. et Industr.*, nº 858).

(2) Intuition qui d'ailleurs se trompe souvent, comme toute intuition.

c'était découvrir dans l'ensemble des nombres complexes une structure topologique bien connue, celle du plan euclidien, avec toutes les possibilités d'application qu'elle comportait, et qui, entre les mains de Gauss, Abel, Cauchy et Riemann, renouvelèrent l'Analyse en moins d'un siècle.

De tels exemples se sont multipliés dans les 50 dernières années ; espace de Hilbert, et plus généralement espaces fonctionnels, introduisant les structures topologiques dans des ensembles d'éléments qui n'étaient plus des *points*, mais des *fonctions* ; — nombres p-adiques de Hensel, où, chose plus étonnante encore, la topologie envahit ce qui était jusqu'alors le règne du *discret*, du discontinu par excellence, l'ensemble des nombres entiers ; — mesure de Haar, élargissant démesurément le champ d'application de la notion d'intégrale, et permettant une analyse très profonde des propriétés des groupes continus ; — autant de moments décisifs du progrès des mathématiques, de tournants où un éclair de génie a décidé de l'orientation nouvelle d'une théorie, en y révélant une structure qui ne paraissait pas *a priori* y jouer un rôle.

C'est dire que, moins que jamais, la mathématique est réduite à un jeu purement mécanique de formules isolées ; plus que jamais, l'intuition règne en maîtresse dans la genèse des découvertes ; mais elle dispose désormais des puissants leviers que lui fournit la théorie des grands types de structures, et elle domine d'un seul coup d'œil d'immenses domaines unifiés par l'axiomatique, où jadis semblait régner le plus informe chaos.

Une vue d'ensemble.

Guidés par la conception axiomatique, essayons donc de nous représenter l'ensemble de l'univers mathématique. Certes, nous n'y reconnaîtrons plus guère l'ordre traditionnel, qui, tel celui des premières nomenclatures des espèces animales, se bornait à ranger côte à côte les théories qui présentaient le plus de ressemblances extérieures. Au lieu des compartiments bien délimités de l'Algèbre, de l'Analyse, de la Théorie des Nombres et de la Géométrie, nous verrons, par exemple, la théorie des nombres premiers voisiner avec celle des courbes algébriques, ou la géométrie euclidienne avec les équations intégrales ; et le principe ordonnateur sera la conception d'une *hiérarchie de structures*, allant du simple au complexe, du général au particulier.

Au centre sont les grands types de structures, dont nous avons énuméré tout à l'heure les principaux, les *structures-mères*, pourrait-on dire. Dans chacun de ces types règne déjà une assez grande diversité, car il faut y distinguer la structure la plus générale du type considéré, avec le plus petit nombre d'axiomes, et celles qu'on obtient en l'enrichissant d'axiomes supplémentaires dont chacun apporte sa moisson de nouvelles conséquences. C'est ainsi que la théorie des groupes, outre des généralités valables pour tous les groupes et ne dépendant que des axiomes énoncés plus haut, comporte une théorie particulière des groupes

finis (où l'on ajoute l'axiome que le nombre d'éléments du groupe est fini), une théorie particulière des groupes *abéliens* (où l'on a $x \tau y = y \tau x$ quels que soient x, y), ainsi qu'une théorie des groupes *abéliens finis* (où ces deux axiomes sont supposés vérifiés simultanément). De même, dans les ensembles *ordonnés*, on distingue ceux où (comme pour l'ordre des entiers ou des nombres réels), deux éléments quelconques sont comparables, et qui sont dits *totalement ordonnés* ; parmi ces derniers, on étudie plus particulièrement encore les ensembles dits *bien ordonnés* (dans lesquels, comme pour les entiers > 0, tout sous-ensemble a un « plus petit élément »). Il y a une gradation analogue dans les structures topologiques.

Au delà de ce premier noyau, apparaissent les structures qu'on pourrait appeler *multiples*, où interviennent à la fois deux ou plusieurs des grandes structures-mères, non pas simplement juxtaposées (ce qui n'apporterait rien de nouveau), mais *combinées* organiquement par un ou plusieurs axiomes qui les relient. C'est ainsi qu'on connait l'*algèbre topologique*, étude de structures où figurent à la fois une ou plusieurs lois de composition et une topologie, reliées par la condition que les opérations algébriques soient fonctions *continues* (pour la topologie considérée) des éléments sur lesquels elles portent. Non moins importante est la *topologie algébrique*, où certains ensembles de points de l'espace, définis par des propriétés topologiques (simplexes, cycles, etc.) sont pris eux-mêmes comme éléments sur lesquels viennent opérer des lois de composition. La combinaison des structures d'ordre et de l'algèbre est, elle aussi, fertile en résultats, conduisant, d'un côté à la théorie de la divisibilité et des idéaux, de l'autre à l'Intégration et à la « théorie spectrale » des opérateurs, où la topologie vient aussi jouer son rôle.

Plus loin commencent enfin à proprement parler les théories particulières, où les éléments des ensembles que l'on considère, jusqu'ici totalement indéterminés dans les structures générales, reçoivent une individualité plus caractérisée. C'est ici que l'on rejoint les théories de la mathématique classique ; analyse des fonctions de variable réelle ou complexe, géométrie différentielle, géométrie algébrique, théorie des nombres ; mais elles ont perdu leur autonomie d'autrefois, et sont maintenant des carrefours où viennent se croiser et agir les unes sur les autres de nombreuses structures mathématiques plus générales.

Pour garder une juste perspective, il nous faut, après cette rapide esquisse, ajouter aussitôt qu'elle ne doit être considérée que comme une approximation très grossière de l'état actuel des mathématiques, tel qu'il est en réalité ; elle est à la fois *schématique*, *idéalisée* et *figée*.

Schématique — car dans le détail, les choses ne se passent pas aussi simplement ni aussi régulièrement que nous avons paru le dire ; il y a entre autres d'inattendus retours en arrière, où une théorie tout à fait particulière comme celle des nombres réels vient prêter une aide indispensable à l'édification d'une théorie générale comme la Topologie ou l'Intégration.

Idéalisée — car il s'en faut que, dans toutes les parties des mathé-

matiques la part exacte de chacune des grandes structures soit parfaitement reconnue et délimitée ; dans certaines théories (par exemple en Théorie des Nombres), il subsiste de très nombreux résultats isolés qu'on ne sait jusqu'ici classer ni relier de façon satisfaisante à des structures connues.

Figée enfin — car rien n'est plus éloigné de la méthode axiomatique qu'une conception statique de la science, et nous ne voudrions pas laisser croire au lecteur que nous avons prétendu retracer un état définitif de celle-ci. Les structures ne sont immuables ni dans leur nombre ni dans leur essence ; il est très possible que le développement ultérieur des mathématiques augmente le nombre des structures fondamentales, en révélant la fécondité de nouveaux axiomes, ou de nouvelles combinaisons d'axiomes, et on peut d'avance escompter des progrès décisifs de ces *inventions* de structures, si l'on en juge d'après ceux qu'ont apportés les structures actuellement connues ; d'autre part ces dernières ne sont en aucune manière des édifices achevés, et il serait très surprenant que tout le suc de leurs principes fût d'ores et déjà épuisé.

Ainsi, avec ces indispensables correctifs, peut-on mieux prendre conscience de la vie interne de la mathématique, de ce qui fait à la fois son unité et sa diversité ; telle une grande cité, dont les faubourgs ne cessent de progresser, de façon quelque peu chaotique, sur le terrain environnant, tandis que le centre se reconstruit périodiquement, chaque fois suivant un plan plus clair et une ordonnance plus majestueuse, jetant à bas les vieux quartiers et leurs dédales de ruelles, pour lancer vers la périphérie des avenues toujours plus directes, plus larges et plus commodes.

Retour sur le passé et conclusion.

La conception que nous avons tenté d'exposer ci-dessus ne s'est pas formée d'un seul coup, et n'est que le terme d'une évolution qui s'est poursuivie depuis plus d'un demi-siècle, et n'a pas été sans rencontrer de sérieuses résistances, tant chez les philosophes que chez les mathématiciens eux-mêmes. Beaucoup de ces derniers n'ont pendant longtemps consenti à voir dans l'axiomatique que de vaines subtilités de logiciens, incapables de féconder une théorie quelconque. Cette critique s'explique sans doute par un pur accident historique : les premières axiomatisations, et qui eurent le plus de retentissement (celles de l'arithmétique avec Dedekind et Peano, de la géométrie euclidienne avec Hilbert) portaient sur des théories *univalentes*, c'est-à-dire telles que le système global de leurs axiomes les déterminait entièrement, et n'était par suite susceptible de s'appliquer à aucune théorie autre que celle d'où on l'avait extrait (au rebours de ce que nous avons vu pour la théorie des groupes, par exemple) ; s'il en avait été ainsi pour toutes les structures, le reproche de stérilité adressé à la méthode axiomatique aurait été pleinement justi-

fié (1). Mais celle-ci a prouvé le mouvement en marchant ; et les répugnances que l'on constate encore çà et là ne s'expliquent que par la peine qu'éprouve naturellement l'esprit à admettre que, devant un problème concret, une forme d'intuition autre que celle directement suggérée par les données (et qui ne s'obtient souvent que par une abstraction supérieure et parfois difficile) puisse se montrer également féconde.

Quant aux objections des philosophes, elles portent surtout sur un terrain où nous aurions garde, faute de compétence, de nous aventurer sérieusement ; le grand problème des rapports du monde expérimental et du monde mathématique (2). Qu'il y ait une connexion étroite entre les phénomènes expérimentaux et les structures mathématiques, c'est ce que semblent bien confirmer de la façon la plus inattendue les découvertes récentes de la physique contemporaine ; mais nous en ignorons totalement les raisons profondes (si tant est qu'on puisse donner un sens à ces termes), et nous les ignorerons peut-être toujours. Il est en tout cas une constatation qui pourrait, sur ce point, inciter à l'avenir les philosophes à plus de prudence : avant les développements révolutionnaires de la physique moderne, on a dépensé beaucoup de peine pour vouloir à toute force faire sortir les mathématiques de vérités expérimentales, notamment d'intuitions spatiales immédiates ; mais d'une part la physique des quanta a montré que cette intuition « macroscopique » du réel couvrait des phénomènes « microscopiques » d'une tout autre nature, relevant de branches des mathématiques qui n'avaient certes pas été imaginées en vue d'applications aux sciences expérimentales ; et d'un autre côté, la méthode axiomatique a montré que les « vérités » dont on voulait faire le pivot des mathématiques n'étaient que des aspects très spéciaux de conceptions générales qui n'y limitaient nullement leur portée. Si bien qu'en fin de compte, cette intime fusion dont on nous faisait admirer l'harmonieuse nécessité, n'apparaît plus que comme un contact fortuit de deux disciplines dont les liens sont beaucoup plus cachés qu'on ne pouvait le supposer *a priori*.

Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de *formes* abstraites — les structures mathématiques ; et il se trouve — sans qu'on sache bien pourquoi — que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes,

(1) On a aussi assisté, surtout aux débuts de l'axiomatique, à une floraison de structures tératologiques, totalement dénuées d'applications, et dont le seul mérite était de montrer la portée exacte de chaque axiome en observant ce qui se passait quand on le supprimait ou quand on le modifiait. On pouvait évidemment être tenté d'en conclure que c'étaient là les seuls produits qu'il convenait d'attendre de la méthode !

(2) Nous n'abordons pas ici les objections soulevées par l'application des règles de la logique formelle aux raisonnements des théories axiomatiques ; elles se rattachent aux difficultés logiques rencontrées par la Théorie des Ensembles. Signalons simplement que ces difficultés peuvent se surmonter d'une manière qui ne laisse subsister aucun malaise, ni aucun doute sur la correction des raisonnements ; on pourra consulter là-dessus les articles de H. Cartan et J. Dieudonné cités plus haut.

comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir pleinement leur rôle élaborateur.

C'est seulement avec ce sens du mot « forme » qu'on peut dire que la méthode axiomatique est un « formalisme » ; l'unité qu'elle confère à la mathématique, ce n'est pas l'armature de la logique formelle, unité de squelette sans vie ; c'est la sève nourricière d'un organisme en plein développement, le souple et fécond instrument de recherches auquel ont consciemment travaillé, depuis Gauss, tous les grands penseurs des mathématiques, tous ceux qui, suivant la formule de Lejeune-Dirichlet, ont toujours tendu à « substituer les *idées* au *calcul* ».

NICOLAS BOURBAKI.